Министерство науки и высшего образования Российской Федерации федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

Отчет

по **Лабораторной работе №3**

по дисциплине **«Методы Оптимизации»**

Работа учеников

группы М32351  
Юльцовой Натальи,  
Колчина Дмитрия

2021

**Цель и задачи работы:**

Цель : Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения и провести исследование реализованного метода на матрицах.

Задачи:

1. Реализовать прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения с учетом следующих требований:
   * формат матрицы – профильный;
   * размерность матрицы, элементы матрицы и вектор правой части читать из файлов, результаты записывать в файл;
   * в программе резервировать объём памяти, необходимый для хранения в нем только одной матрицы и необходимого числа векторов (то есть треугольные матрицы, полученные в результате разложения, должны храниться на месте исходной матрицы);
   * элементы матрицы обрабатывать в порядке, соответствующем формату хранения, то есть необходимо работать именно со столбцами верхнего и строками нижнего треугольников.
2. Провести исследование реализованного метода на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания (то есть оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения). Исследования представить в виде таблицы. Для одного из значений k попытаться найти операцию, вызывающую скачкообразное накопление погрешности, пояснить полученные результаты.
3. Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности.
4. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц. Сравнить метод Гаусса по точности получаемого решения и по количеству действий с реализованным прямым методом LU-разложения.

Ход работы.

Задание 1.

Реализовали прямой метод решения СЛАУ на основе LU-разложения.

Ax = b

A = LU, где L – нижний треугольник, а U – верхний.

Получаем, LUx = b, пусть Ux = y и Ly = b.

Тогда выполним LU-разложение, решим прямым ходом Ly = b (найдем y), обратным Ux = y (найдем x) и получим LUx = b – решение исходной системы.

Храним матрицу в профильном формате. Профиль – количество от первого ненулевого до диагонального элемента. Для хранения потребовался массив главной диагонали, массив элементов нижнего треугольника (по строкам), верхнего (по столбцам), массив информации по профилю. Используется преимущественно для тех матриц, в которых ненулевые элементы сосредоточены у главной диагонали.

Задание 2.

Матрицы, число обусловленности которых регулируется за счёт изменения диагонального преобладания.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | k | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ / ‖𝑥∗‖ |
| 10 | 0 | 2.25151e-13 | 1.14748e-14 |
| 10 | 1 | 7.78425e-13 | 3.96722e-14 |
| 10 | 2 | 2.05465e-11 | 1.04715e-12 |
| 10 | 3 | 3.96112e-11 | 2.01877e-12 |
| 10 | 4 | 1.12918e-09 | 5.75484e-11 |
| 10 | 5 | 6.32456 | 0.322329 |
| 10 | 6 | 18.9737 | 0.966988 |
| 10 | 7 | \_ | \_ |
| 10 | 8 | 47.4342 | 2.41747 |
| 10 | 9 | 30.0416 | 1.53106 |
| 20 | 0 | 6.93438e-13 | 1.2944e-14 |
| 20 | 1 | 1.46093e-12 | 2.72702e-14 |
| 20 | 2 | 3.92012e-11 | 7.31742e-13 |
| 20 | 3 | 8.96241e-10 | 1.67295e-11 |
| 20 | 4 | 1.02857e-08 | 1.91997e-10 |
| 20 | 5 | \_ | \_ |
| 20 | 6 | 119.63 | 2.23305 |
| 20 | 7 | 58.1378 | 1.08522 |
| 20 | 8 | 24.5967 | 0.459131 |
| 20 | 9 | \_ | \_ |
| 40 | 0 | 6.08497e-12 | 4.0895e-14 |
| 40 | 1 | 2.93302e-11 | 1.97118e-13 |
| 40 | 2 | 3.3639e-10 | 2.26076e-12 |
| 40 | 3 | 1.21004e-09 | 8.13222e-12 |
| 40 | 4 | 3.3307e-09 | 2.23845e-11 |
| 40 | 5 | \_ | \_ |
| 40 | 6 | \_ | \_ |
| 40 | 7 | \_ | \_ |
| 40 | 8 | \_ | \_ |
| 40 | 9 | \_ | \_ |
| 80 | 0 | 2.43355e-11 | 5.836e-14 |
| 80 | 1 | 1.25929e-10 | 3.01995e-13 |
| 80 | 2 | 4.92767e-09 | 1.18173e-11 |
| 80 | 3 | 5.02165e-08 | 1.20426e-10 |
| 80 | 4 | 789.332 | 1.89293 |
| 80 | 5 | 223.607 | 0.536241 |
| 80 | 6 | 1009.58 | 2.42113 |
| 80 | 7 | \_ | \_ |
| 80 | 8 | 162.786 | 0.390384 |
| 80 | 9 | \_ | \_ |
| 160 | 0 | 3.75306e-10 | 3.19695e-13 |
| 160 | 1 | 2.30754e-09 | 1.96562e-12 |
| 160 | 2 | 1.00659e-07 | 8.57439e-11 |
| 160 | 3 | 4.29778e-07 | 3.66096e-10 |
| 160 | 4 | 1811.99 | 1.54349 |
| 160 | 5 | 5693.68 | 4.85002 |
| 160 | 6 | 2209.38 | 1.882 |
| 160 | 7 | 1857.84 | 1.58255 |
| 160 | 8 | 2144.02 | 1.82633 |
| 160 | 9 | 4623.25 | 3.93820 |
| 320 | 0 | 1.09711e-09 | 3.31184e-13 |
| 320 | 1 | 4.16484e-08 | 1.25724e-11 |
| 320 | 2 | 9.68372e-09 | 2.92322e-12 |
| 320 | 3 | 4.03893e-06 | 1.21923e-09 |
| 320 | 4 | 6131.3 | 1.85085 |
| 320 | 5 | 4010.61 | 1.21068 |
| 320 | 6 | 10084.7 | 3.04425 |
| 320 | 7 | 3292.39 | 0.993871 |
| 320 | 8 | 63200.2 | 19.0782 |
| 320 | 9 | 13031.8 | 3.93390 |
| 640 | 0 | 3.05732e-07 | 3.2668e-11 |
| 640 | 1 | 1.54408e-06 | 1.64987e-10 |
| 640 | 2 | 1.01026e-05 | 1.07948e-09 |
| 640 | 3 | 87473.3 | 9.34669 |
| 640 | 4 | 52285.1 | 5.58676 |
| 640 | 5 | 33309.3 | 3.55916 |
| 640 | 6 | \_ | \_ |
| 640 | 7 | 7510.41 | 0.802501 |
| 640 | 8 | 101992 | 10.898 |
| 640 | 9 | 354327 | 37.8605 |

Заметим, что увеличении k и при увеличении n погрешность решения увеличивается.

Задание 3.

Матрицы Гильберта

Hij = 1/(i + j - 1)

Число обусловленности матрицы экспоненциально растет (O(1 +)4n) – плохо обусловлена.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ / ‖𝑥∗‖ |
| 10 | 0.00340388 | 0.000173478 |
| 20 | 734.135 | 13.7036 |
| 40 | 1988.3 | 13.3627 |
| 80 | 25962.5 | 62.2618 |
| 160 | 328574 | 279.888 |
| 320 | 509884 | 153.918 |
| 640 | 5.77858e+06 | 617.452 |
| 1280 | 5.41937e+07 | 2048.52 |

Плохая обусловленность вызывает сильную погрешность даже на небольших n.

Задание 4.

Прямой метод LU-разложения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ / ‖𝑥∗‖ | Количество операций |
| 10 | 0.00340388 | 0.000173478 | 430 |
| 20 | 734.135 | 13.7036 | 3060 |
| 40 | 1988.3 | 13.3627 | 22920 |
| 80 | 25962.5 | 62.2618 | 177040 |
| 160 | 328574 | 279.888 | 1390880 |
| 320 | 509884 | 153.918 | 11024960 |
| 640 | 5.77858e+06 | 617.452 | 87790720 |
| 1280 | 5.41937e+07 | 2048.52 | 700688640 |

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента для плотных матриц.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ | ‖𝑥∗ − 𝑥𝑘‖ / ‖𝑥∗‖ | Количество операций |
| 10 | 0.00299326 | 0.000152551 | 430 |
| 20 | 640.007 | 11.9466 | 3060 |
| 40 | 12582.4 | 84.562 | 22920 |
| 80 | 75141 | 180.199 | 177040 |
| 160 | 458418 | 390.492 | 1390880 |
| 320 | 6.69609e+06 | 2021.34 | 11024960 |
| 640 | 2.18428e+07 | 2333.94 | 87790720 |
| 1280 | 2.65123e+08 | 10021.6 | 700688640 |

И при методе на основе LU-разложения, и при методе Гаусса погрешность растет при увеличении размерности и числа обусловленности. Количество операций умножения/сложения одинаково. Есть разница в точности, метод Гаусса вычисляет менее точно из-за количества операций, которые понижают точность.

Выводы:

\* Метод на основе LU-разложения и метод Гаусса точность становится меньше на плохо обусловленных матрицах и при больших размерностях.

\* Метод Гаусса менее точен .

\* Методы работают за примерно одинаковое число операций, асимптотика О(n3).

Код программы: